

Jule/Nyttår/Påske-Integral

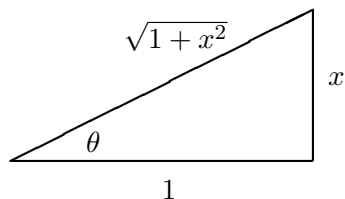
7

January 12, 2006

Vi husker at dagens integral lignet en smule på det fra i går:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (1)$$

Her skal vi som i går gjøre en substitusjon relatert til geometriske betraktninger, på sett og vis, og siden jeg har lært meg å bruke picture-miljøet i \LaTeX skal jeg inkludere figur i dag:



Jeg har ikke lært meg å floate figuren på siden av teksten, men det kommer nok etterhvert. Vi skal i allefall bruke følgende:

$$x = \tan \theta \quad (2)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (3)$$

Vi er også så sinnsykt fremsynte at vi vet vi kommer til å få bruk for

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (4)$$

Ved å sette inn i integralet vårt får vi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (5)$$

$$\int \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta \quad (7)$$

Det vi egentlig har gjort her er å gjøre om et ikke-trivielt integral til et annet ikke-trivielt integral. En ny runde med substitusjoner er påkrevd. Vi har

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right)}{\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta} \quad (8)$$

Vi bruker følgende substitusjon:

$$U = \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \quad (9)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) \quad (11)$$

Ved å sette inn får vi

$$\int \frac{1}{U} dU \quad (12)$$

$$= \ln U + C \quad (13)$$

Vi setter inn for U

$$= \ln \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right) + C \quad (14)$$

Vi setter inn for $\tan \theta$ og $\cos \theta$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) + C \quad (15)$$

Og det var i grunnen det. Jeg har glemt igjen listen med integraler på skolen, så jeg er egentlig ikke sikker på hva jeg skal ta i morgen, men det blir sikkert spennende. Følg med!